Test 6 – Sujet A

Résoudre les deux exercices suivants.

Exercice 1

(i) Calculer la primitive suivante :

$$\int (3x+2)\cos x \; \mathrm{d}x$$

(ii) Calculer l'intégrale suivante à l'aide du changement de variable $x = e^t$:

$$\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{e^t}{1+e^{2t}} \mathrm{d}t$$

Exercice 2

(i) Résoudre l'équation différentielle suivante et trouver l'unique solution qui vérifie la condition initiale donnée :

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{t^2}{1+t^3} y(t) \\ y(\sqrt[3]{7}) = 4 \end{cases}$$

(ii) Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{1}{t} x'(t) + 2x(t) = 2e^{-t^2}$$

Test 6 – Sujet A

NOM et PRÉNOM (lisibles) :

Résolution des exercices

Test 6 – Sujet A

Corrigé du test

Exercice 3

(i) Par intégration par parties :

$$\int (3x+2)\cos x \;\mathrm{d}x = (3x+2)\sin x - \int 3\sin x \;\mathrm{d}x = (3x+2)\sin x + 3\cos x + \text{cste}$$

(ii) Si on pose $x = e^t$, on a $\mathrm{d}x = e^t \mathrm{d}t$, $x = 1$ quand $t = 0$, et $x = \sqrt{3}$ quand $t = \ln\sqrt{3}$. Donc :

$$\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{e^t}{1+e^{2t}}\mathrm{d}t = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = [\arctan x]_1^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

Exercice 4

(i) Les solutions de l'équation différentielle proposée sont :

$$y : t \mapsto \lambda e^{\frac{1}{3}\ln(1+t^3)} = \lambda\sqrt[3]{1+t^3},$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$. De plus,

$$y(\sqrt[3]{7}) = 4 \iff 2\lambda = 4 \iff \lambda = 2.$$

L'unique solution est donc $y : t \mapsto 2\sqrt[3]{1+t^3}$.

(ii) L'équation homogène associée est $x'(t) + 2tx(t) = 0$. Elle a pour solutions

$$x_0 : t \mapsto \lambda e^{-t^2},$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$. La méthode de variation de la constante nous donne une solution particulière de l'équation totale : $x_p : t \mapsto \lambda(t)e^{-t^2}$, avec

$$\lambda(t) = \int 2t \;\mathrm{d}t = t^2.$$

Ainsi, les solutions de cette équation différentielle sont :

$$x : t \mapsto e^{-t^2}(t^2 + \lambda),$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$.